令和９年度　工学部３年次編入学（一般入試）学力試験　解答例

機械数理工学科　数理工学教育プログラム

(線形代数 1)

(1) $A=\begin{pmatrix}1&9&7&1\\-1&1&1&1\\1&6&4&0\\0&2&1&0\end{pmatrix}, \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}-1\\1\\2\\k\end{pmatrix}$ とする。拡大係数行列を $\tilde{A}=(A,\boldsymbol{b})=\begin{pmatrix}1&9&7&1&-1\\-1&1&1&1&1\\1&6&4&0&2\\0&2&1&0&k\end{pmatrix}$ と表す。方程式が解を持つための必要十分条件は $\mathrm{rank}A=\mathrm{rank}\tilde{A}$ である。$\tilde{A}$ を行基本変形すると

$$\tilde{A}\to\begin{pmatrix}1&9&7&1&-1\\0&10&8&2&0\\0&-3&-3&-1&3\\0&2&1&0&k\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-2&-2&8\\0&1&-1&-1&9\\0&-3&-3&-1&3\\0&-1&-2&-1&k+3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-2&-2&8\\0&1&-1&-1&9\\0&0&-6&-4&30\\0&0&-3&-2&k+12\end{pmatrix}$$
$$\to\begin{pmatrix}1&0&-2&-2&8\\0&1&-1&-1&9\\0&0&1&2/3&-5\\0&0&-3&-2&k+12\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&-2/3&-2\\0&1&0&-1/3&4\\0&0&1&2/3&-5\\0&0&0&0&k-3\end{pmatrix}$$

である。よって解を持つ必要十分条件は $k=3$ である。このとき

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}2\\1\\-2\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\4\\-5\\0\end{pmatrix}\qquad (t\text{ は任意定数})$$

となる。

(2) $\det Q^2=(\det Q)^2$ であるので，$\det Q$ を求める。

$$\det Q=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&2-1&3-1&4-1\\0&2^2-1&3^2-1&4^2-1\\0&2^3-1&3^3-1&4^3-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&3\\3&2(3+1)&3(4+1)\\7&2(3^2+3+1)&3(4^2+4+1)\end{vmatrix}$$
$$=6\begin{vmatrix}1&1&1\\3&4&5\\7&13&21\end{vmatrix}=6\begin{vmatrix}1&0&0\\3&1&2\\7&6&14\end{vmatrix}=6\begin{vmatrix}1&2\\6&14\end{vmatrix}=12$$

である。ゆえに $\det Q^2=144$ を得る。

令和９年度　工学部３年次編入学（一般入試）学力試験　解答例

機械数理工学科　数理工学教育プログラム

(微分積分 $\boxed{2}$)

(1)　$f(x,y)=\sin(x+y)-(\sin x+\sin y)$ とおくと，

連立方程式 $\begin{cases} f_x(x,y)=\cos(x+y)-\cos x=0 \\ f_y(x,y)=\cos(x+y)-\cos y=0 \end{cases}$ の解は，$0<x<\pi,\ 0<y<\pi$ のとき $(x,y)=\left(\dfrac{2}{3}\pi,\dfrac{2}{3}\pi\right)$ である。

$f_{xx}(x,y)=-\sin(x+y)+\sin x,\ f_{xy}(x,y)=-\sin(x+y),\ f_{yy}(x,y)=-\sin(x+y)+\sin y$

より，判別式を D とすると

$$\begin{aligned} D&=\left(f_{xy}\left(\frac{2}{3}\pi,\frac{2}{3}\pi\right)\right)^2-f_{xx}\left(\frac{2}{3}\pi,\frac{2}{3}\pi\right)\cdot f_{yy}\left(\frac{2}{3}\pi,\frac{2}{3}\pi\right) \\ &=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=-\frac{9}{4}<0, \\ f_{xx}&\left(\frac{2}{3}\pi,\frac{2}{3}\pi\right)=\sqrt{3}>0 \end{aligned}$$

なので，f は $\left(\dfrac{2}{3}\pi,\dfrac{2}{3}\pi\right)$ で極小値 $f\left(\dfrac{2}{3}\pi,\dfrac{2}{3}\pi\right)=-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ をとる。

(2)　$n=1,2,\cdots$ に対して

$$D_n=\{(x,y)\mid x\geqq 0,\ y\geqq 0,\ 1\leqq x^2+y^2\leqq n^2\}$$

とおくと，$\{D_n\}$ は D の近似列である。

$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ と変換すると，$r\theta$ 平面の長方形領域

$$E_n=\left\{(r,\theta)\ \middle|\ 1\leqq r\leqq n,\ 0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right\}$$

と D_n が対応する．ヤコビアンが r になることに注意すると，

$$\begin{aligned} \iint_{D_n}\frac{1}{(x^2+y^2)^p}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\iint_{E_n}r^{-2p}\cdot r\ \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\int_1^n\left(r^{1-2p}\left(\int_0^{\pi/2}1\,\mathrm{d}\theta\right)\right)\mathrm{d}r \\ &=\frac{\pi}{2}\int_1^n r^{1-2p}\ \mathrm{d}r=\frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{2(1-p)}r^{2(1-p)}\right]_1^n \\ &=\frac{\pi}{4(1-p)}n^{2(1-p)}+\frac{\pi}{4(p-1)} \end{aligned}$$

となり，$p>1$ より $\dfrac{\pi}{4(1-p)}n^{2(1-p)}+\dfrac{\pi}{4(p-1)}\ \longrightarrow\ \dfrac{\pi}{4(p-1)}\ (n\to\infty)$ である。

よって，$\displaystyle\iint_D\frac{1}{(x^2+y^2)^p}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\pi}{4(p-1)}$ となる。

令和９年度　工学部３年次編入学（一般入試）学力試験　解答例

機械数理工学科　数理工学教育プログラム

(微分方程式 $\boxed{3}$)

特性方程式 $\lambda^3 - 8\lambda^2 + 21\lambda - 18 = (\lambda - 2)(\lambda - 3)^2 = 0$ を解くと，$\lambda = 2, 3$（重解）であるから，同次方程式の一般解は

$$y = C_1 e^{2x} + (C_2 + C_3 x)e^{3x}$$

となる。また $y = ke^x$ を $y''' - 8y'' + 21y' - 18y = -4e^x$ に代入すると $(k - 8k + 21k - 18k)e^x = -4e^x$ より $k = 1$，すなわち，特殊解が e^x であるから，与えられた微分方程式の一般解は

$$y = C_1 e^{2x} + (C_2 + C_3 x)e^{3x} + e^x$$

である。

$$y' = 2C_1 e^{2x} + (3C_2 + C_3 + 3C_3 x)e^{3x} + e^x$$
$$y'' = 4C_1 e^{2x} + (9C_2 + 6C_3 + 9C_3 x)e^{3x} + e^x$$

であるから，初期条件より，

$$C_1 + C_2 + 1 = 1, \quad 2C_1 + 3C_2 + C_3 + 1 = 0, \quad 4C_1 + 9C_2 + 6C_3 + 1 = 0,$$

すなわち

$$C_1 = 5, \quad C_2 = -5, \quad C_3 = 4$$

であるから，

$$y = 5e^{2x} + (-5 + 4x)e^{3x} + e^x$$

を得る。