令和８年度　工学部第３年次編入学（一般入試）学力試験　解答例

機械数理工学科　数理工学教育プログラム

(科目名：線形代数 $\boxed{1}$)

(1) 固有方程式は

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}4-\lambda & 2\\ 2 & 1-\lambda\end{vmatrix}=(4-\lambda)(1-\lambda)-4=\lambda(\lambda-5)=0$$

である。したがって，固有値は 0 と 5 である。$\begin{pmatrix}4 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$ より，固有値 0 に対応する固有ベクトルのひとつは $\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\ -2\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$ より， 固有値 5 に対応する固有ベクトルのひとつは $\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$ である。よって $T=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$ とすると，A は

$$T^{-1}AT=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}$$

と対角化される。ただし，T は直交行列なので $T^{-1}=T^t$ である。

(2) まず

$$\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}=T^t\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix},\ \text{すなわち}\ \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}^t T^t$$

とおく。$\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ は 1 対 1 に対応し，$T^tT=I$ (I は単位行列) であるから

$$x^2+y^2=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}^t\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}^t T^tT\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}^t\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}=\xi^2+\eta^2$$

となる。また，(1) より

$$f(x,y)=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}^t A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}^t T^tAT\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}^t\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}=5\eta^2$$

となる。よって $x^2+y^2\leqq 1$ における $f(x,y)$ の最大値と最小値は $\xi^2+\eta^2\leqq 1$ における $g(\xi,\eta)=5\eta^2$ の最大値と最小値と一致する。ゆえに最大値は 5，最小値は 0 である。

(この解答例はあくまで一例です。解答は，ここに示した解答例に限るものではありません。)

令和 8 年度　工学部第 3 年次編入学（一般入試）学力試験　解答例

機械数理工学科　数理工学教育プログラム

(科目名：微分積分 $\boxed{2}$)

(1)　$f(x)=x^2$, $g(x)=\sin x$ とおくと，

$$f'(x)=2x,\quad f''(x)=2,\quad f'''(x)=0,\quad f^{(4)}(x)=0$$
$$g'(x)=\cos x,\quad g''(x)=-\sin x,\quad g'''(x)=-\cos x,\quad g^{(4)}(x)=\sin x$$

であるから，ライプニッツの公式により

$$\begin{aligned}(x^2\sin x)^{(4)} &= (f(x)g(x))^{(4)}\\ &= {}_4\mathrm{C}_0 f^{(4)}(x)g(x)+{}_4\mathrm{C}_1 f'''(x)g'(x)+{}_4\mathrm{C}_2 f''(x)g''(x)+{}_4\mathrm{C}_3 f'(x)g'''(x)+{}_4\mathrm{C}_4 f(x)g^{(4)}(x)\\ &= 1\cdot 0\cdot\sin x+4\cdot 0\cdot\cos x+6\cdot 2\cdot(-\sin x)+4\cdot 2x\cdot(-\cos x)+1\cdot x^2\cdot\sin x\\ &= (x^2-12)\sin x-8x\cos x\end{aligned}$$

となる。

(2)　$x+y=u$, $x-y=v$ と変数変換すると，$x=\dfrac{1}{2}u+\dfrac{1}{2}v$, $y=\dfrac{1}{2}u-\dfrac{1}{2}v$ であり，この変換は 1 対 1 である。また，xy 平面上の領域 D は uv 平面上の領域

$$E=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2 \mid |u|\leqq 1, |v|\leqq 1\}$$

に変わり，x と y の u と v に関するヤコビ行列式 $J(u,v)$ は

$$J(u,v)=\begin{vmatrix}\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2}\\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2}\end{vmatrix}=-\frac{1}{2}$$

となる。したがって，重積分の変数変換の公式より

$$\begin{aligned}\iint_D (x^2+y^2)dxdy &= \frac{1}{4}\iint_E \left((u+v)^2+(u-v)^2\right)\left|-\frac{1}{2}\right|dudv\\ &= \frac{1}{4}\iint_E (u^2+v^2)dudv\\ &= \frac{1}{4}\iint_E u^2dudv+\frac{1}{4}\iint_E v^2dudv\end{aligned}$$

となる。E は uv 平面上の長方形の領域なので，累次積分により

$$\iint_E u^2dudv=\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1}u^2du\right)dv=\frac{2}{3}\int_{-1}^{1}dv=\frac{4}{3}$$
$$\iint_E v^2dudv=\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1}v^2dv\right)du=\frac{2}{3}\int_{-1}^{1}du=\frac{4}{3}$$

であることから

$$\iint_D (x^2+y^2)dxdy=\frac{1}{4}\iint_E u^2dudv+\frac{1}{4}\iint_E v^2dudv=\frac{2}{3}$$

を得る。

(この解答例はあくまで一例です。解答は，ここに示した解答例に限るものではありません。)

令和 8 年度　工学部第 3 年次編入学（一般入試）学力試験　解答例

機械数理工学科　数理工学教育プログラム

(科目名：微分方程式 $\boxed{3}$)

(1) 特性方程式 $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$ を解いて, $\lambda = -1 \pm 2i$ を得る。

(2) まず, 基本解は $e^{-t}\cos 2t$, $e^{-t}\sin 2t$ である。

　特解を $u_p = A\cos 3t + B\sin 3t$ とおく。

$$\begin{aligned} u_p' &= 3B\cos 3t - 3A\sin 3t, \\ u_p'' &= -9A\cos 3t - 9B\sin 3t \end{aligned}$$

に注意して, 微分方程式に代入すると,

$$\begin{gathered} (-9A\cos 3t - 9B\sin 3t) + 2(3B\cos 3t - 3A\sin 3t) + 5(A\cos 3t + B\sin 3t) = 13\cos 3t \\ \Longleftrightarrow (-4A + 6B)\cos 3t + (-6A - 4B)\sin 3t = 13\cos 3t \end{gathered}$$

を得る。係数比較によって, 連立方程式

$$\begin{cases} -4A + 6B = 13 \\ -6A - 4B = 0 \end{cases}$$

を得るので, これを解いて $A = -1$, $B = \dfrac{3}{2}$ となる。以上より, 一般解は,

$$u = C_1 e^{-t}\cos 2t + C_2 e^{-t}\sin 2t - \cos 3t + \frac{3}{2}\sin 3t$$

である。ただし，C_1, C_2 は任意定数とする。

(この解答例はあくまで一例です。解答は，ここに示した解答例に限るものではありません。)