数　学　（解　答　例）

$\boxed{\mathbf{1}}$

(問 1) P の満たす条件から $\sqrt{x^2+(y+2)^2}-\sqrt{x^2+(y-2)^2}=2$
変形して

$$\begin{aligned}&x^2+(y+2)^2=4+4\sqrt{x^2+(y-2)^2}+x^2+(y-2)^2,\\&2y-1=\sqrt{x^2+(y-2)^2},\\&(2y-1)^2=x^2+(y-2)^2,\quad 3y^2-x^2=3,\\&\frac{x^2}{3}-y^2=-1,\quad \left(\frac{x}{\sqrt{3}}-y\right)\left(\frac{x}{\sqrt{3}}+y\right)=-1\end{aligned}$$

$\mathrm{F'P}-\mathrm{FP}=2>0$ に注意して, P が動く曲線は, F と F′ を焦点とする ($y=\pm\dfrac{x}{\sqrt{3}}$ を漸近線とする）y 座標が正の範囲にある（上半分の）双曲線である.

よって, OP は, $\mathrm{P}(0,1)$ のとき最小値をとる.

(問 2) 極座標を使う: $x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta$
与式に代入して $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\cos\theta$
P が動く双曲線の漸近線は $y=\pm\dfrac{x}{\sqrt{3}}$, $y>0$, に注意して,

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}<\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\cos\theta<\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(問 3) $\triangle\mathrm{F'FP}$ の外接円の中心は, 線分 FF′ の垂直二等分線上, すなわち x 軸上, にある。中心の座標を $(a,0)$ とおく。外接円の半径 $2\sqrt{2}$。中心と F を結ぶ線分の長さが外接円の半径。中心と原点 O および F を 3 つの頂点とする直角三角形上, 三平方の定理から

$$a^2+2^2=(2\sqrt{2})^2,\quad a^2=4\Longleftrightarrow a=\pm 2$$

$a=2$ のとき, 外接円の方程式は $(x-2)^2+y^2=8$

Pが動く双曲線の方程式と外接円の方程式を連立して (双曲線と外接円の交点を求める）,

$$\begin{cases} x^2-3y^2=-3 \\ (x-2)^2+y^2=8 \end{cases}$$

第二の式から $y^2=8-(x-2)^2$. これを第一式に代入して

$$\begin{aligned} x^2-3(8-(x-2)^2)=-3 &\iff 4x^2-12x-9=0 \\ &\iff x=\frac{12\pm\sqrt{12^2+12^2}}{8}=\frac{3(1\pm\sqrt{2})}{2} \end{aligned}$$

$a=-2$ のとき, 外接円の方程式は $(x+2)^2+y^2=8$
上と同様に

$$\begin{cases} x^2-3y^2=-3 \\ (x+2)^2+y^2=8 \end{cases}$$

この連立方程式を変形して

$$\begin{aligned} x^2-3(8-(x+2)^2)=-3 &\iff 4x^2+12x-9=0 \\ &\iff x=\frac{-12\pm\sqrt{12^2+12^2}}{8}=\frac{-3(1\pm\sqrt{2})}{2} \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$

$$\begin{aligned} Y_n &= 1^{n-(p+q+r)}(1+\sqrt{3}i)^p(2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i)^q(3\sqrt{3}+3i)^r \\ &= (1+\sqrt{3}i)^p(2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i)^q(3\sqrt{3}+3i)^r \end{aligned}$$

なので

$$\begin{aligned} |Y_n| &= |1+\sqrt{3}i|^p|2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i|^q|3\sqrt{3}+3i|^r \\ &= 2^p4^q6^r \end{aligned}$$

(問 1) $|Y_2|=2$ となるのは,

$p=1, \quad q=r=0$
$\iff$ 2 回のうち, 2 または 3 が 1 回かつ 1 が 1 回

この確率は $\quad 2\times2\times\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{9}$

(問 2)

$|Y_n|=4$ となるのは,

$$\begin{aligned}&p=2,\ q=r=0\\&\Longleftrightarrow (2\text{ の回数}, 3\text{ の回数})=(2,0),(1,1),(0,2),\\&\qquad (4\text{ の回数}, 5\text{ の回数}, 6\text{ の回数})=(0,0,0)\end{aligned}$$

この確率は $\quad {}_nC_2\times 4\times\left(\dfrac{1}{6}\right)^2\times\left(\dfrac{1}{6}\right)^{n-2},$

または,

$$\begin{aligned}&q=1,\ p=r=0\\&\Longleftrightarrow (4\text{ 出る回数}, 5\text{ 出る回数})=(1,0),(0,1),\\&\qquad (2\text{ 出る回数}, 3\text{ 出る回数}, 6\text{ 出る回数})=(0,0,0)\end{aligned}$$

この確率は $\quad n\times 2\times\left(\dfrac{1}{6}\right)\times\left(\dfrac{1}{6}\right)^{n-1}$

和をとって $\quad (2n(n-1)+2n)\left(\dfrac{1}{6}\right)^n=\dfrac{2n^2}{6^n}$

(問 3)

$$\begin{aligned}&1+\sqrt{3}i=2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})\\&2\sqrt{2}(1+i)=4(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})\\&3(\sqrt{3}+i)=6(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})\end{aligned}$$

$\theta=\pi\left(\dfrac{p}{3}+\dfrac{q}{4}+\dfrac{r}{6}\right)$ とおくと

$$Y_n=2^p4^q6^r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

$$\begin{aligned}Y_n:\text{実数}\quad&\Longleftrightarrow\quad Y_n\text{ の虚部}=0\\&\Longleftrightarrow\quad \sin\theta=0\\&\Longleftrightarrow\quad l=\frac{\theta}{\pi}=\frac{p}{3}+\frac{q}{4}+\frac{r}{6},\qquad \text{ここで } l \text{ は整数とする}\\&\Longleftrightarrow\quad 4p+3q+2r=12l\end{aligned}$$

によって示された.

(問 4) $Y_n=-192$ から $|Y_n|=192$

$$\begin{aligned}&|Y_n|=2^p4^q6^r=2^{p+2q}6^r=192=2^5\times 6\\&\Longleftrightarrow p+2q=5,\quad r=1\end{aligned}$$

したがって　$(p,q)=(5,0),(3,1),(1,2),\quad r=1$

$(p,q)=(1,2),\quad r=1$　のみが (問 3) の条件を満たす.

このとき確かに $\theta=\pi$ であり, $Y_n=-192$ となる.

また,　1 の回数 $=n-4$

したがって,

(2 の回数, 3 の回数) $=(1,0),(0,1)$　かつ　6 の回数 $=1$

かつ　(4 の回数, 5 の回数) $=(2,0),(1,1),(0,2)$

よって求める確率は

$$n\times 2\times\frac{1}{6}\times(n-1)\times\frac{1}{6}\times({}_{n-2}C_2)\times 4\times\left(\frac{1}{6}\right)^2\times\left(\frac{1}{6}\right)^{n-4}$$
$$=\frac{4n(n-1)(n-2)(n-3)}{6^n}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$

(問 1)

$$\begin{aligned}V_1 &= \pi\int_1^e a^2(\log x)^2\,dx\\ &= \pi a^2\int_1^e(\log x)^2\,dx\end{aligned}$$

部分積分によって

$$\begin{aligned}\int_1^e(\log x)^2\,dx &= \left[x(\log x)^2\right]_1^e-2\int_1^e\log x\,dx,\\ \int_1^e\log x\,dx &= [x\log x]_1^e-[x]_1^e,\end{aligned}$$

以上から

$$\begin{aligned}V_1 &= \pi a^2\left(\left[x(\log x)^2\right]_1^e-2\,[x\log x]_1^e+2\,[x]_1^e\right)\\ &= \pi a^2\left(e-2e+2(e-1)\right)=\pi a^2(e-2)\end{aligned}$$

(問 2)　$x>0$ のとき,

$$y=-a\log x\iff\log x=-\frac{y}{a}\iff x=e^{-\frac{y}{a}}$$

よって

$$I_n=\pi\int_0^n e^{-\frac{2y}{a}}\,dy=\pi\left[-\frac{a}{2}e^{-\frac{2y}{a}}\right]_0^n=\frac{\pi a}{2}\left(1-e^{-\frac{2n}{a}}\right)$$

(問 3)　(問 2) の結果で, $a>0$ により $\lim_{n\to\infty} e^{-\frac{2n}{a}}=0$ に注意して

$$V_2=\lim_{n\to\infty} I_n=\frac{\pi a}{2}$$

(問 4)　(問 1) と（問 3) の結果より, $2V_1=V_2$ のとき

$$2\pi a^2(e-2)=\frac{\pi a}{2}, \qquad 4a(e-2)=1,$$

$$a=\frac{1}{4(e-2)}$$