（解答例）

数　　学 ③

（数学 I・数学 II・数学 III・数学 A・数学 B・数学 C）

医学部（医学科）

$\boxed{1}$ (問　1)

$$|\overrightarrow{\mathrm{BD}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2 - 2(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}) + |\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2$$
$$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2 - 2(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}) + |\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2$$
$$|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2 - 2(\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}) + |\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2$$

を $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{DA}}|^2$ と $|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{BD}}|^2$ に代入して

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{DA}}|^2 = 2|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2+2|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2-2(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})-2(\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})$$
$$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{BD}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2-2(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}})$$

辺々引き算して，

$$\begin{aligned}
&|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{DA}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{BD}}|^2\\
&=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2-2(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})-2(\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})+2(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}})\\
&=|\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2 \geqq 0
\end{aligned}$$

(問　2) （問 1）の証明より，等号が成立するのは $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ のときである。四角形 ABCD は平行四辺形になる。よって面積は $pq\sin\theta$ である。

$\boxed{2}$ (問　1)

$$\begin{aligned}
\angle\mathrm{BOC} = \arg(\gamma/\beta) = \arg z = \arg\left(\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)\right)\\
= \arg\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6}
\end{aligned}$$

(問　2) 1, z, z^2 が表す複素数平面上の点を $\mathrm{A}_0, \mathrm{B}_0, \mathrm{C}_0$ とする。$\alpha = r(\cos\theta + i\sin\varphi)$ のとき，点 $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ は点 $\mathrm{A}_0, \mathrm{B}_0, \mathrm{C}_0$ をそれぞれ原点中心に角度 φ 回転させ原点からの距

離を r 倍して得られる。δ_0 を複素数とし，δ_0 が表す複素数平面上の点を D_0 とする。$z^2 = 1+\sqrt{3}i$ なので，点 $\mathrm{A}_0, \mathrm{C}_0$ を通る直線は点 A_0 を通り虚軸に平行な直線である。この直線が線分 $\mathrm{B}_0\mathrm{D}_0$ の垂直 2 等分線になるのは，B_0 と D_0 がこの直線に関して線対称の位置にあるときである。よって，$\delta_0 = \left(2-\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i.$

よって，$\delta = \alpha\delta_0 = \left\{\left(2-\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right\}\alpha.$

(問　3)

$$
\begin{aligned}
\frac{\beta-\gamma}{\delta-\gamma} &= \frac{\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i-(1+\sqrt{3}i)}{2-\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i-(1+\sqrt{3}i)} = \frac{\sqrt{6}-2+(\sqrt{2}-2\sqrt{3})i}{2-\sqrt{6}+(\sqrt{2}-2\sqrt{3})i} \\
&= \frac{\left\{\sqrt{6}-2+(\sqrt{2}-2\sqrt{3})i\right\}^2}{-(\sqrt{2}-2\sqrt{3})^2-(2-\sqrt{6})^2} \\
&= \frac{(6-4\sqrt{6}+4)+2(2\sqrt{3}-6\sqrt{2}-2\sqrt{2}+4\sqrt{3})i-(2-4\sqrt{6}+12)}{-(2-4\sqrt{6}+12)-(4-4\sqrt{6}+6)} \\
&= \frac{-4+2(6\sqrt{3}-8\sqrt{2})i}{-24+8\sqrt{6}} = \frac{-1+(3\sqrt{3}-4\sqrt{2})i}{-6+2\sqrt{6}} \\
&= \frac{(2\sqrt{6}+6)\left\{-1+(3\sqrt{3}-4\sqrt{2})i\right\}}{24-36} \\
&= \frac{-2\sqrt{6}-6+(18\sqrt{2}-16\sqrt{3}+18\sqrt{3}-24\sqrt{2})i}{-12} = \frac{-2\sqrt{6}+(-6\sqrt{2}+2\sqrt{3})i}{-12} \\
&= \frac{\sqrt{6}+3+(3\sqrt{2}-\sqrt{3})i}{6}.
\end{aligned}
$$

よって $\sin\theta = \dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}{6}.$

$\boxed{3}$ $0 \leqq t \leqq 3$ のとき，平面 $x=t$ での四面体 ABCD の切り口は yz 平面の長方形

$$\{(y,z) \mid -(3-t) \leqq y \leqq 3-t,\ 0 \leqq z \leqq t\}$$

である。これを点 $(0,1)$ を中心に回転させて得られる図形 S_t は

$0 \leqq t \leqq 1$ のとき

$$S_t = \left\{(y,z) \mid (1-t)^2 \leqq y^2+(z-1)^2 \leqq 1+(3-t)^2\right\},$$

$1 \leqq t \leqq 2$ のとき

$$S_t = \left\{(y, z) \mid y^2 + (z-1)^2 \leqq 1 + (3-t)^2\right\},$$

$2 \leqq t \leqq 3$ のとき

$$S_t = \left\{(y, z) \mid y^2 + (z-1)^2 \leqq (3-t)^2 + (t-1)^2\right\}$$

となる。

S_t の面積は

$0 \leqq t \leqq 1$ のとき $\pi\{(t^2 - 6t + 10) - (t^2 - 2t + 1)\} = \pi(-4t + 9)$,

$1 \leqq t \leqq 2$ のとき $\pi(t^2 - 6t + 10)$,

$2 \leqq t \leqq 3$ のとき $\pi(t^2 - 6t + 9 + t^2 - 2t + 1) = \pi(2t^2 - 8t + 10)$

である。よって

$$V = \int_0^1 \pi(-4t+9)dt + \int_1^2 \pi(t^2 - 6t + 10)dt + \int_2^3 \pi(2t^2 - 8t + 10)dt.$$

$$\begin{aligned}
\frac{V}{\pi} &= \left[-2t^2 + 9t\right]_0^1 + \left[\frac{t^3}{3} - 3t^2 + 10t\right]_1^2 + \left[\frac{2}{3}t^3 - 4t^2 + 10t\right]_2^3 \\
&= 7 + \left(\frac{8}{3} - 12 + 20\right) - \left(\frac{1}{3} - 3 + 10\right) + (18 - 36 + 30) - \left(\frac{16}{3} - 16 + 20\right) \\
&= 7 + \frac{8}{3} + 8 - \frac{1}{3} - 7 + 12 - \frac{16}{3} - 4 \\
&= 13.
\end{aligned}$$

$\therefore V = 13\pi.$

$\boxed{4}$ (問　1) 区分求積法より

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n^{p+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^p = \int_0^1 x^p\, dx = \frac{1}{p+1}.$$

(問　2) $y' = px^{p-1}$ より，求める接線の方程式は

$$y = p\alpha^{p-1}x + (1-p)\alpha^p.$$

上で求めた接線は $y = x^p$ のグラフより下にあるので，区間 $[\alpha, \beta]$ で

$$p\alpha^{p-1}x + (1-p)\alpha^p \leqq x^p$$

が成り立つことが分かる。また，点 (α, α^p) と (β, β^p) を結ぶ線分は区間 $[\alpha, \beta]$ で $y = x^p$ のグラフより上にあるので，区間 $[\alpha, \beta]$ で

$$x^p \leqq \frac{\beta^p - \alpha^p}{\beta - \alpha}(x - \alpha) + \alpha^p$$

がわかる。この二つの不等式より

$$\int_\alpha^\beta \left\{p\alpha^{p-1}x + (1-p)\alpha^p\right\} dx \leqq \int_\alpha^\beta x^p\, dx \leqq \int_\alpha^\beta \left\{\frac{\beta^p - \alpha^p}{\beta - \alpha}(x - \alpha) + \alpha^p\right\} dx \qquad (1)$$

が分かる。ここで,

$$\begin{aligned}
(1)\,\text{の一番左の項} &= p\alpha^{p-1}\frac{\beta^2 - \alpha^2}{2} + (1-p)\alpha^p(\beta - \alpha) \\
&= \frac{\beta - \alpha}{2}\left\{p\alpha^{p-1}(\beta + \alpha) + 2(1-p)\alpha^p\right\} \\
&= \frac{\beta - \alpha}{2}\left\{2\alpha^p + p(\beta - \alpha)\alpha^{p-1}\right\}
\end{aligned}$$

であり，また

$$(1)\,\text{の一番右の項} = \frac{(\beta^p + \alpha^p)(\beta - \alpha)}{2}$$

であるから，証明すべき不等式が得られる。

(問　3)

$$\frac{S_n - cn^{p+1}}{n^p} = n\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^p - \int_0^1 x^p\, dx\right\}$$

である。$T_n=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{k}{n}\right)^p-\int_0^1 x^p\,dx$ とおくと，

$$\frac{S_n-cn^{p+1}}{n^p}=nT_n$$

である。

$$T_n=\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{n}\left(\frac{k}{n}\right)^p-\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} x^p\,dx\right\}$$

と式変形できる。（問２）の不等式より，

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\left(\frac{k}{n}\right)^p-\frac{1}{2n}\left\{\left(\frac{k-1}{n}\right)^p+\left(\frac{k}{n}\right)^p\right\}&\leqq\frac{1}{n}\left(\frac{k}{n}\right)^p-\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} x^p\,dx\\&\leqq\frac{1}{n}\left(\frac{k}{n}\right)^p-\frac{1}{2n}\left\{2\left(\frac{k-1}{n}\right)^p+p\frac{1}{n}\left(\frac{k-1}{n}\right)^{p-1}\right\}\end{aligned}$$

この不等式を辺々 $1\leqq k\leqq n$ で和を取ると

$$\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^p-\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k-1}{n}\right)^p\leqq T_n\leqq\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^p-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k-1}{n}\right)^p-\frac{p}{2n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\frac{k-1}{n}\right)^{p-1}$$

すなわち，

$$\frac{1}{2n}\leqq T_n\leqq\frac{1}{n}-\frac{p}{2n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\frac{k-1}{n}\right)^{p-1}$$

よって，

$$\frac{1}{2}\leqq nT_n\leqq 1-\frac{p}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\frac{k-1}{n}\right)^{p-1}.$$

ここで，$n\to\infty$ のとき

$$1-\frac{p}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\frac{k-1}{n}\right)^{p-1}\to 1-\frac{p}{2}\int_0^1 x^{p-1}\,dx=\frac{1}{2}$$

なので，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}nT_n=\frac{1}{2}$.