

令和 7 年度 熊本大学個別学力検査（前期日程）【数学②】 解答例

（解答例）

数 学 ②

（数学 I ・ 数学 II ・ 数学 III ・ 数学 A ・ 数学 B ・ 数学 C）

理学部，医学部（保健学科放射線技術科学専攻，検査技術科学専攻），薬学部，工学部
情報融合学環（理系型）

1 (問 1)

$$z_{n+1} = (1+i)z_n + (2+i)\overline{z_n} \quad (1)$$

の両辺の共役を取って

$$\overline{z_{n+1}} = (1-i)\overline{z_n} + (2-i)z_n \quad (2)$$

を得る。式 (1), (2) を辺々加えると

$$z_{n+1} + \overline{z_{n+1}} = 3z_n + 3\overline{z_n}$$

すなわち

$$\alpha_{n+1} = 3\alpha_n$$

を得る。 $\alpha_1 = z_1 + \overline{z_1} = 2$ なので, $\alpha_n = 2 \cdot 3^{n-1}$.

(問 2)

$$\begin{aligned} \beta_{n+1} &= (2-i)z_{n+1} - (2+i)\overline{z_{n+1}} \\ &= (2-i)\{(1+i)z_n + (2+i)\overline{z_n}\} - (2+i)\{(1-i)\overline{z_n} + (2-i)z_n\} \\ &= \{(2-i)(1+i) - (2+i)(2-i)\}z_n + \{(2-i)(2+i) - (2+i)(1-i)\}\overline{z_n} \\ &= -(2-i)z_n + (2+i)\overline{z_n} = -\beta_n \end{aligned}$$

$\beta_1 = -2i$ なので, $\beta_n = (-1)^n \cdot 2i$.

(問 3)

$$\begin{aligned} z_n &= \frac{1}{4}\{(2+i)\alpha_n + \beta_n\} = \frac{1}{4}\{(2+i) \cdot 2 \cdot 3^{n-1} + (-1)^n \cdot 2i\} \\ &= 3^{n-1} + \frac{1}{2}\{3^{n-1} + (-1)^n\}i \end{aligned}$$

2 (問 1) 点 (t, t^2) における C の接線は

$$y = 2tx - t^2 \quad (3)$$

これが点 $(0, -4)$ を通るのは $t = \pm 2$ のとき。よって

$$\ell_1 : y = 4x - 4, \quad \ell_2 : y = -4x - 4.$$

対称性より、求める面積は

$$2 \int_0^2 \{x^2 - (4x - 4)\} dx = 2 \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x \right]_0^2 = 2 \left(\frac{8}{3} - 8 + 8 \right) = \frac{16}{3}.$$

(問 2) 式 (3) より、 $a = 2t$, $b = -t^2 = -a^2/4$ と分かる。 $y = ax + b$ と x 軸との交点の x 座標は $x = -b/a = a/4$ である。 C , x 軸, ℓ で囲まれる部分の面積は

$$\int_0^{a/2} x^2 dx - \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{4} \cdot \frac{a^2}{4} = \frac{a^3}{96}$$

である。 $a^3/96 = 16/3$ より $a^3 = 16 \times 32 = 2^9$ で、 $a = 2^3 = 8$ となる。また、 $b = -16$ となる。

(問 3) 接線 (3) が点 (p, q) を通るのは、 $q = 2tp - t^2$ 、すなわち、 $t = p \pm \sqrt{p^2 - q}$ のとき。

$$t_1 = p + \sqrt{p^2 - q}, \quad t_2 = p - \sqrt{p^2 - q}$$

とおく。 C , m_1 , m_2 で囲まれる部分の面積は

$$\begin{aligned} \int_{t_2}^p \{x^2 - (2t_2x - t_2^2)\} dx + \int_p^{t_1} \{x^2 - (2t_1x - t_1^2)\} dx &= \int_{t_2}^p (x - t_2)^2 dx + \int_p^{t_1} (x - t_1)^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{3}(x - t_2)^3 \right]_{t_2}^p + \left[\frac{1}{3}(x - t_1)^3 \right]_p^{t_1} = \frac{1}{3}(p - t_2)^3 - \frac{1}{3}(p - t_1)^3 = \\ &= \frac{1}{3}(t_1 - t_2) \{ (p - t_2)^2 + (p - t_2)(p - t_1) + (p - t_1)^2 \} \\ &= \frac{1}{3}(t_1 - t_2) \{ 3p^2 - 3p(t_1 + t_2) + (t_1^2 + t_1t_2 + t_2^2) \} \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{p^2 - q} \{ 3p^2 - 3p \cdot 2p + (4p^2 - q) \} = \frac{2}{3}\sqrt{p^2 - q} (p^2 - q) = \frac{2}{3}(p^2 - q)^{3/2} \end{aligned}$$

である。これが $16/3$ に等しいのは $p^2 - q = 4$ のとき。よって軌跡は放物線 $q = p^2 - 4$ 。

3 (問 1)

$$X_1 = \{(m, n) \mid m, n \text{ は } m^2 + n^2 \leq 25 \text{ をみたす正の整数}\}$$

である。

$m = 1$ のとき, $n^2 \leq 25 - 1^2 = 24$ より, $n = 1, 2, 3, 4$.

$m = 2$ のとき, $n^2 \leq 25 - 4 = 21$ より, $n = 1, 2, 3, 4$.

$m = 3$ のとき, $n^2 \leq 25 - 9 = 16$ より, $n = 1, 2, 3, 4$.

$m = 4$ のとき, $n^2 \leq 25 - 16 = 9$ より, $n = 1, 2, 3$.

$m \geq 5$ のとき, $n^2 \leq 0$ より, n はない。

以上より, X_1 の要素の個数は $4 \times 3 + 3 = 15$ 個。

(問 2) 正の整数 m に対し

$(m, 1)$ がどのような $a > 0$ に対しても X_a に含まれない

$$\Leftrightarrow \text{すべての } a > 0 \text{ に対して, } m^2 a + \frac{1}{a} > 25$$

$$\Leftrightarrow \text{すべての } a > 0 \text{ に対して, } m^2 a^2 - 25a + 1 > 0 \quad (4)$$

である。2 次関数 $m^2 a^2 - 25a + 1$ は $a = \frac{25}{2m^2} > 0$ で最小値をとるので

$$(4) \Leftrightarrow 2 \text{ 次式 } m^2 a^2 - 25a + 1 \text{ の判別式 } (-25)^2 - 4m^2 \text{ が負 } \Leftrightarrow m > 25/2.$$

このような m の最小値は 13.

(問 3) 正整数の組 (m, n) に対し,

$$\text{ある } a > 0 \text{ に対して, } m^2 a + \frac{n^2}{a} \leq 25$$

$$\Leftrightarrow \text{ある } a > 0 \text{ に対して, } m^2 a^2 - 25a + n^2 \leq 0 \quad (5)$$

である。2 次関数 $m^2 a^2 - 25a + n^2$ は $a = \frac{25}{2m^2} > 0$ で最小値をとるので

$$(5) \Leftrightarrow 2 \text{ 次式 } m^2 a^2 - 25a + n^2 \text{ の判別式 } (-25)^2 - 4m^2 n^2 \text{ が } 0 \text{ 以上 } \Leftrightarrow mn \leq 25/2.$$

この不等式を満たす組 (m, n) を求める。 $m = 1$ のとき, $1 \leq n \leq 12$.

$m = 2$ のとき, $1 \leq n \leq 6$.

$m = 3$ のとき, $1 \leq n \leq 4$.

$m = 4$ のとき, $1 \leq n \leq 3$.

$m = 5, 6$ のとき, $1 \leq n \leq 2$,

$7 \leq m \leq 12$ のとき, $n = 1$.

$m \geq 13$ のとき, n はない。

以上より, X の要素の個数は $12 + 6 + 4 + 3 + 2 \times 2 + 1 \times 6 = 35$ 個。

4 (問 1) $x > 0$ のとき, $f(x) := x + \log 3 - \log(x + 3) > 0$ を示す。

$x > 0$ のとき $f'(x) = 1 - \frac{1}{x+3} > 0$ なので, $f(x)$ は $x > 0$ で増加関数。 $f(0) = \log 3 - \log 3 = 0$ より, $x > 0$ で $f(x) > 0$ と分かる。

(問 2) $y = \frac{1}{x}$ のグラフを考えることで

$$\int_1^n \frac{1}{x} dx > \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

を得る。ここで

$$(\text{左辺}) = [\log x]_1^n = \log n$$

であるから,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} < \log n$$

を得る。両辺に 1 を加えて,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} < 1 + \log n$$

を得る。

(問 3)

$$a_n = \left(3 + \frac{1}{1}\right) \left(3 + \frac{1}{2}\right) \cdots \left(3 + \frac{1}{n}\right)$$

より

$$\log \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{n} \log a_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log \left(3 + \frac{1}{k}\right) \quad (6)$$

$\log 3 < \log \left(3 + \frac{1}{k}\right)$ より

$$\log 3 < \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log \left(3 + \frac{1}{k}\right) \quad (7)$$

(問 1), (問 2) の不等式を用いて

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log \left(3 + \frac{1}{k}\right) < \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} + \log 3\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \log 3 < \frac{1 + \log n}{n} + \log 3 \quad (8)$$

を得る。(6), (7), (8) より,

$$\log 3 < \log \sqrt[n]{a_n} < \frac{1 + \log n}{n} + \log 3$$

ここで $n \rightarrow \infty$ とすると, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{n} = 0$ を用いて $\lim_{n \rightarrow \infty} \log \sqrt[n]{a_n} = \log 3$ を得る。よつ

て $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 3$.