

数 学 ②

(数学Ⅰ・数学Ⅱ・数学Ⅲ・数学A・数学B・数学C)

試験時間 120分

理学部，医学部(保健学科放射線技術科学専攻，検査技術科学専攻)，
薬学部，工学部，情報融合学環(理系型)

問 題	ページ
① ～ ④	1 ～ 2

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで，この冊子を開いてはいけません。
 2. 各解答紙の2箇所に受験番号を必ず記入しなさい。
なお，解答紙には，必要事項以外は記入してはいけません。
 3. 解答は，必ず指定された解答紙に記入しなさい。また裏面は採点の対象としません。
 4. 試験開始後，この冊子又は解答紙に落丁・乱丁及び印刷の不鮮明な箇所などがあれば，手を挙げて監督者に知らせなさい。
 5. この冊子の白紙と余白部分は，適宜下書きに使用してもかまいません。
 6. 試験終了後，解答紙は持ち帰ってはいけません。
 7. 試験終了後，この冊子は持ち帰りなさい。
- ※この冊子の中に解答紙が挟み込んであります。

1 次のように定められた複素数の数列 $\{z_n\}$ を考える。

$$z_1 = 1, \quad z_{n+1} = (1+i)z_n + (2+i)\overline{z_n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

ただし、 i は虚数単位であり、 $\overline{z_n}$ は z_n と共役な複素数である。以下の問いに答えよ。

(問 1) $\alpha_n = z_n + \overline{z_n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) とおくと、数列 $\{\alpha_n\}$ の一般項を求めよ。

(問 2) $\beta_n = (2-i)z_n - (2+i)\overline{z_n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) とおくと、数列 $\{\beta_n\}$ の一般項を求めよ。

(問 3) 数列 $\{z_n\}$ の一般項を求めよ。

2 放物線 $y = x^2$ を C とする。以下の問いに答えよ。

(問 1) 点 $(0, -4)$ を通り C に接する直線のうち、傾きが正のものを ℓ_1 、負のものを ℓ_2 とする。

C , ℓ_1 , ℓ_2 で囲まれる部分の面積を求めよ。

(問 2) $a > 0$, $b < 0$ とし、直線 $\ell: y = ax + b$ は C の接線であるとする。 C , x 軸, ℓ で囲まれる部分の面積が(問 1)で求めた面積に等しいとする。 a , b を求めよ。

(問 3) 点 (p, q) に対し、 (p, q) を通る 2 つの直線 m_1 , m_2 が C の異なる接線であり、 C , m_1 , m_2 で囲まれる部分の面積が(問 1)で求めた面積に等しいとする。このような (p, q) の軌跡を求めよ。

3 実数 $a > 0$ に対し、座標平面の点の集合 X_a を

$$X_a = \left\{ (m, n) \mid m, n \text{ は } m^2 a + \frac{n^2}{a} \leq 25 \text{ を満たす正の整数} \right\}$$

で定める。以下の問いに答えよ。

(問 1) X_1 の要素の個数を求めよ。

(問 2) 正の整数 m に対し、点 $(m, 1)$ はどのような $a > 0$ に対しても X_a に含まれないとする。

このような m の最小値を求めよ。

(問 3) 座標平面の点の集合 X を

$$X = \{(m, n) \mid \text{ある } a > 0 \text{ に対し } (m, n) \in X_a \text{ となる}\}$$

で定める。 X の要素の個数を求めよ。

4 以下の問いに答えよ。

(問 1) $x > 0$ のとき、不等式 $\log(x+3) < x + \log 3$ を証明せよ。

(問 2) n を 2 以上の整数とすると、不等式

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} < 1 + \log n$$

を証明せよ。

(問 3) 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 4, \quad a_{n+1} = \left(3 + \frac{1}{n+1}\right) a_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

により定める。 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$ の値を求めよ。ただし、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{n} = 0$ を用いてよい。