

令和 7 年度 熊本大学個別学力検査（前期日程） 【数学①】 解答例

（解答例）

数 学 ①

（数学 I ・ 数学 II ・ 数学 A ・ 数学 B ・ 数学 C）

教育学部，医学部（保健学科看護学専攻），情報融合学環（文系型）

1 (問 1) 共有点の x 座標は方程式 $x^2 + 2x + 1 = (2n + 3)x$ の解なので 2 次式

$$f(x) = x^2 + 2x + 1 - (2n + 3)x = x^2 - (2n + 1)x + 1$$

の判別式 D が正であることを示せばよい。

$$D = (2n + 1)^2 - 4 = 4n^2 + 4n - 3 = 4\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 - 4$$

$n \geq 1$ のとき $\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 > 1$ なので、 $n \geq 1$ のとき $D > 0$ である。よって、 C と ℓ の共有点の個数は 2 個である。

(問 2)

$$\begin{aligned} S &= \int_{\alpha}^{\beta} (x^2 + 2x + 1) dx = \left[\frac{x^3}{3} + x^2 + x \right]_{\alpha}^{\beta} = \frac{1}{3}(\beta^3 - \alpha^3) + (\beta^2 - \alpha^2) + (\beta - \alpha) \\ &= \frac{1}{3}(\beta - \alpha) \{ \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 + 3(\alpha + \beta) + 3 \}. \end{aligned}$$

ここで、 α, β は上の $f(x)$ の根なので、解と係数の関係より、 $\alpha + \beta = 2n + 1$, $\alpha\beta = 1$ である。よって、

$$\begin{aligned} \frac{S}{\beta - \alpha} &= \frac{1}{3} \{ \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 + 3(\alpha + \beta) + 3 \} = \frac{1}{3} \{ (\alpha + \beta)^2 - \alpha\beta + 3(\alpha + \beta) + 3 \} \\ &= \frac{1}{3} \{ (2n + 1)^2 - 1 + 3(2n + 1) + 3 \} = \frac{1}{3} (4n^2 + 10n + 6) = \frac{2}{3} (2n^2 + 5n + 3). \end{aligned}$$

(問 3)

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^m a_n &= \sum_{n=1}^m \frac{2}{3} (2n^2 + 5n + 3) = \frac{2}{3} \left\{ 2 \cdot \frac{1}{6} m(m+1)(2m+1) + 5 \cdot \frac{1}{2} m(m+1) + 3m \right\} \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} m \{ 2(m+1)(2m+1) + 15(m+1) + 18 \} = \frac{1}{9} m \{ 4m^2 + 6m + 2 + 15m + 15 + 18 \} \\ &= \frac{1}{9} m (4m^2 + 21m + 35). \end{aligned}$$

2 (問 1) 7 秒後に線分 AB 上に P があるので、その座標は $(3, 4)$ である。そのとき初めて線分 AB に到達するので、6 秒後に P は $(2, 4)$ にいて、その後に $(3, 4)$ に移動する。

6 秒後に P が (2, 4) に到達する動き方は, 6 秒間のうちにいつ横向きに移動したかの ${}_6C_2 = 15$ 通りある。よって, $a_7 = 15$.

(問 2) k 秒後に線分 AB に P があるので, その座標は $(m, k - m)$ である。その時初めて線分 AB に到達するので, $k - 1$ 秒後に P は $(m - 1, k - m)$ にいて, その後に $(m, k - m)$ に移動する。その動き方は ${}_{k-1}C_{m-1}$ 通りある。答えは, $a_k = {}_{k-1}C_{m-1}$.

(問 3) 点 (m, n) に達する動き方の総数は ${}_{m+n}C_m (= {}_{m+n}C_n)$ である。これは $m, m + 1, \dots, m + n$ 秒後に初めて線分 AB に達した後上に動いた動きの総数に一致する。よって,

$$\sum_{k=m}^{m+n} a_k = {}_{m+n}C_m$$

となる。

3 (問 1) H の座標を (x, y, z) とおく。 $|\overrightarrow{OH}| = 3$ より,

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9 \quad (1)$$

AB ⊥ OH より,

$$0 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OH} = (2, 2, -1) \cdot (x, y, z) = 2x + 2y - z \quad (2)$$

AH ⊥ OH より,

$$0 = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{OH} = (x + 1, y - 3, z - 1) \cdot (x, y, z) = x^2 + x + y^2 - 3y + z^2 - z \quad (3)$$

式 (1), (3) より

$$x - 3y - z = -9 \quad (4)$$

連立方程式 (1), (2), (4) を解く。(2), (4) より $x = 9 - 5y$, $z = -8y + 18$ を得る。これを (1) に代入して

$$(9 - 5y)^2 + y^2 + (-8y + 18)^2 = 9 \Leftrightarrow 90y^2 - 9 \cdot 42y + 9 \cdot 44 = 0$$

$$\Leftrightarrow 5y^2 - 21y + 22 = 0 \Leftrightarrow (5y - 11)(y - 2) = 0$$

よって, $y = \frac{11}{5}, 2$ となるが, 仮定より y は整数なので, $y = \frac{11}{5}$ は不適である。よって, $y = 2$, $x = -1$, $z = 2$ となる。以上より, $H(-1, 2, 2)$ である。

(問 2) $C(c, 0, 0)$ とおく。 $OH \perp AC$ より

$$0 = \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AC} = (-1, 2, 2) \cdot (c + 1, -3, -1) = -c - 1 - 6 - 2$$

であるので, $c = -9$. よって $C(-9, 0, 0)$ である。

(問 3) $\overrightarrow{AB} = (2, 2, -1)$, $\overrightarrow{AC} = (-8, -3, -1)$ なので,

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2 \cdot |\overrightarrow{AC}|^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2} = \frac{1}{2} \sqrt{9 \times 74 - 21^2} = \frac{3}{2} \sqrt{74 - 49} = \frac{15}{2}.$$

別解: $\overrightarrow{AB} = (2, 2, -1)$, $\overrightarrow{AC} = (-8, -3, -1)$ より $|\overrightarrow{AB}| = 3$, $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{74}$ である。また, $\angle BAC = \theta$ とすると,

$$\cos \theta = \frac{(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{-21}{3\sqrt{74}} = \frac{-7}{\sqrt{74}}$$

であり, これより, $\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \frac{5}{\sqrt{74}}$ を得る。よって,

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \sin \theta = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \sqrt{74} \cdot \frac{5}{\sqrt{74}} = \frac{15}{2}.$$

(問 4) $\frac{1}{3} \triangle ABC \cdot |\overrightarrow{OH}| = \frac{1}{3} \cdot \frac{15}{2} \cdot 3 = \frac{15}{2}.$

4 (問 1) 曲線 $C_1: y = x^2 - (a+1)x + a$ と ℓ との共有点の x 座標は

$$x^2 - (a+1)x + a = x - a \quad (*)$$

の解である。

$$(*) \Leftrightarrow x^2 - (a+2)x + 2a = 0 \Leftrightarrow (x-a)(x-2) = 0$$

より, $x = a, 2$ である。

曲線 $C_2: y = -(x^2 - (a+1)x + a)$ と ℓ との共有点の x 座標は

$$-x^2 + (a+1)x - a = x - a \quad (**)$$

の解である。

$$(**) \Leftrightarrow x^2 - ax = 0 \Leftrightarrow x = 0, a$$

である。 ℓ は $a \leq x \leq 1$ で曲線 C_2 と交わり, $x \leq a, 1 \leq x$ で曲線 C_1 と交わるので, C とは, $a \leq 0$ のとき $x = 0, a, 2$ で交わり, $0 < a \leq 1$ のとき $x = a, 2$ で交わる。

(問 2) (イ) $a \leq 0$ と (ロ) $0 < a \leq 1$ で場合分けする。

(イ) $a \leq 0$ のとき:

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_a^0 \{-(x^2 - (a+1)x + a) - (x - a)\} dx + \int_0^1 \{(x - a) + (x^2 - (a+1)x + a)\} dx \\ &\quad + \int_1^2 \{(x - a) - (x^2 - (a+1)x + a)\} dx \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{a}{2}x^2\right]_a^0 + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{a}{2}x^2\right]_0^1 + \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{a+2}{2}x^2 - 2ax\right]_1^2 \\ &= -\left(-\frac{a^3}{3} + \frac{a^3}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{a}{2}\right) + \left(-\frac{8}{3} + 2a + 4 - 4a\right) - \left(-\frac{1}{3} + \frac{a+2}{2} - 2a\right) \\ &= -\frac{1}{6}a^3 - a + 1. \end{aligned}$$

(□) $0 < a \leq 1$ のとき：

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_a^1 \{(x-a) + (x^2 - (a+1)x + a)\} dx + \int_1^2 \{(x-a) - (x^2 - (a+1)x + a)\} dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{a}{2}x^2 \right]_a^1 + \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{a+2}{2}x^2 - 2ax \right]_1^2 \\ &= \left(\frac{1}{3} - \frac{a}{2} \right) - \left(\frac{a^3}{3} - \frac{a^3}{2} \right) + \left(-\frac{8}{3} + 2(a+2) - 4a \right) - \left(-\frac{1}{3} + \frac{a+2}{2} - 2a \right) \\ &= \frac{1}{6}a^3 - a + 1. \end{aligned}$$

(問 3) $a \leq 0$ のとき, $S'(a) = -\frac{1}{2}a^2 - 1 < 0$ より, $S(a)$ は単調減少する。

$0 \leq a \leq 1$ のとき, $S'(a) = \frac{1}{2}a^2 - 1 = \frac{1}{2}(a^2 - 2) < 0$ より, $S(a)$ は単調減少する。以上より, $S(a)$ は $a = 1$ で最小値 $S(1) = \frac{1}{6}$ をとる。