令和７年度 熊本大学個別学力検査（後期日程）【理学部・物理】　解答例

$\boxed{1}$ 解答例

(1) 衝突直前の速度の各成分は $V_x = V\sin\theta,\ V_y = -V\cos\theta$ であり、衝突時に斜面から小球に作用する力は y 軸方向のみなので、

$$u_0 = V_x = V\sin\theta$$

y 軸方向の速度は、はね返りの法則より、

$$v_0 = -eV_y = eV\cos\theta$$

(2) y 軸方向の運動を考えるとその加速度は $a_y = -g\cos\theta$ であり、時刻 t での速度 v と位置 y は、

$$v = -g\cos\theta\cdot t + v_0\ \cdots(1),\quad y = -\frac{1}{2}g\cos\theta\cdot t^2 + v_0 t\ \cdots(2)$$

P_1 で小球は斜面上にあるので、

$$y_1 = -\frac{1}{2}g\cos\theta\cdot t_1^2 + v_0 t_1 = 0,\quad \therefore t_1 = \frac{2v_0}{g\cos\theta}\quad (\because t_1 > 0)$$

(3) t_1 を式 (1) に代入し、P_1 に到達直前の速度 v_0' を求めると

$$v_0' = -g\cos\theta\cdot t_1 + v_0 = -v_0$$

衝突直後の y 成分の速度は、はね返りの法則より

$$v_1 = -ev_0' = ev_0$$

(4) 問 3 の結果より、小球の速度の y 成分は衝突ごとに e 倍となる。よって P_{n-1} で衝突直後の速度は

$$v_{n-1} = ev_{n-2} = e^{n-1}v_0$$

また、問 2 の結果より、P_n に到達するまでの時間 t_n は, v_{n-1} を用いて

$$t_n = \frac{2v_{n-1}}{g\cos\theta} = \frac{2e^{n-1}v_0}{g\cos\theta}$$

(5) 問 1, 4 の結果を用いて、n 回目の飛行時間を V を用いて表すと

$$t_n = \frac{2e^{n-1}eV\cos\theta}{g\cos\theta} = \frac{2e^nV}{g}\ \cdots(3)$$

P_0 から P_1 までの飛行時間 t_1 と、その後の P_n までの各点間での飛行時間 t_n を合計すると

$$T_n = t_1 + t_2 + \cdots + t_n = \frac{2V}{g}\left(e + e^2 + \cdots + e^n\right) = \frac{2V}{g}\sum_{k=1}^{n} e^k$$

等比数列の和の公式より

$$T_n = \frac{2V}{g}\frac{e(1-e^n)}{1-e}$$

(6) 式 (3) より、$n\to\infty$ のとき小球の飛行時間は 0 に収束し、斜面上をすべり降りるものとみなせる。よって、P_0 ではね返ってから各点間での飛行時間が 0 に収束するまでの合計の飛行時間は問 5 の結果を用いて、

$$T = \lim_{n\to\infty} T_n = \lim_{n\to\infty}\frac{2V}{g}\frac{e(1-e^n)}{1-e} = \frac{2V}{g}\frac{e}{1-e}\quad (\because \lim_{n\to\infty} e^n = 0)$$

$\boxed{2}$ 解答例

(1)

$$
\begin{aligned}
B &= \mu_0 nI \\
\Phi &= \pi a^2 B = \pi a^2 \mu_0 nI
\end{aligned}
$$

(2)

$$2\pi aE = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\pi a^2\mu_0 n\frac{\Delta I}{\Delta t} = -\pi a^2\mu_0 n\frac{I_0 - 0}{\Delta t}$$

$$\therefore E = -\frac{\mu_0 anI_0}{2T}$$

(3)

$$F = QE = -\frac{\mu_0 anI_0 Q}{2T}$$

$$\alpha = \frac{F}{M} = -\frac{\mu_0 anI_0 Q}{2MT}$$

(4)

$$v = |\alpha T| = \frac{\mu_0 anI_0 Q}{2M}$$

(5)

$$F' = B_0 I' a = \frac{B_0 aQ}{T'N} = \frac{\mu_0 nI_0 aQ}{T'N}$$

ただし、ソレノイドに電流 I_0 が流れているときに生じる磁束密度を B_0 とした。

(6)

$$
\begin{aligned}
\alpha' &= \frac{NF'}{2M} = \frac{B_0 aQ}{2MT'} = \frac{\mu_0 anI_0 Q}{2MT'} \\
v' &= \alpha' T' = \frac{\mu_0 anI_0 Q}{2M}
\end{aligned}
$$

$\boxed{3}$ 解答例

(1) AB 間は定積変化なので、$p_0V_0 = nRT_\mathrm{A}$, $p_1V_0 = nRT_\mathrm{B}$ (n: 気体の物質量) より

$$\varDelta U_\mathrm{AB} = \frac{3}{2}nR(T_\mathrm{B} - T_\mathrm{A}) = \frac{3}{2}nR\left(\frac{p_1V_0}{nR} - \frac{p_0V_0}{nR}\right) = \frac{3}{2}(p_1 - p_0)V_0 \,(> 0)$$

(2) BC 間は定圧変化なので、気体が外部に対してした仕事は

$$W_\mathrm{BC} = p_1(V_1 - V_0)\,(> 0)$$

また、気体が吸収した熱量は、$p_1V_1 = nRT_\mathrm{C}$ より

$$Q_\mathrm{BC} = \frac{5}{2}nR(T_\mathrm{C} - T_\mathrm{B}) = \frac{5}{2}nR\left(\frac{p_1V_1}{nR} - \frac{p_1V_0}{nR}\right) = \frac{5}{2}p_1(V_1 - V_0)\,(> 0)$$

(3) DA 間での気体の内部エネルギーの変化は、$p_2V_1 = nRT_\mathrm{D}$

$$\varDelta U_\mathrm{DA} = \frac{3}{2}nRT_\mathrm{A} - \frac{3}{2}nRT_\mathrm{D} = \frac{3}{2}p_0V_0 - \frac{3}{2}p_2V_1 = \frac{3}{2}(p_0V_0 - p_2V_1)\,(< 0)$$

気体が外部に対して仕事は、図より

$$W_\mathrm{DA} = \frac{1}{2}(p_0 + p_2)(V_0 - V_1)\,(< 0)$$

($Q_\mathrm{DA} = \varDelta U_\mathrm{DA} + W_\mathrm{DA} < 0$ より D $\to$ A は放熱過程。)

(4) この装置の熱効率は

$$e = \frac{W_\mathrm{BC} + W_\mathrm{DA}}{Q_\mathrm{AB} + Q_\mathrm{BC}} = \frac{W_\mathrm{BC} - |W_\mathrm{DA}|}{\varDelta U_\mathrm{AB} + Q_\mathrm{BC}} = \frac{p_1(V_1 - V_0) - \frac{1}{2}(p_0 + p_2)(V_1 - V_0)}{\frac{3}{2}(p_1 - p_0)V_0 + \frac{5}{2}p_1(V_1 - V_0)}$$

$$= \frac{(2p_1 - p_0 - p_2)(V_1 - V_0)}{5p_1V_1 - 2p_1V_0 - 3p_0V_0}$$