令和７年度 熊本大学個別学力検査（後期日程）【理学部・数学】　解答例

数　学　（解　答　例）

1

(問 1)　F が線分 BE を $s:1-s\ (0<s<1)$ に内分するとすると

$$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=(1-s)\vec{b}+sk\vec{c}$$

F が線分 CD を $1-t:t\ (0<t<1)$ に内分するとすると

$$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=(1-t)\frac{7}{10}\vec{b}+t\vec{c}$$

したがって

$$(1-s)\vec{b}+sk\vec{c}=(1-t)\frac{7}{10}\vec{b}+t\vec{c}$$

$\vec{b}$ と $\vec{c}$ は, ともに零ベクトルでなく, お互いに平行ではないので

$$\begin{cases} 1-s=\dfrac{7}{10}(1-t) \\ sk=t \end{cases}$$

が成り立つ。s と t について解いて

$$s=\frac{3}{10-7k},\quad t=\frac{3k}{10-7k}$$

したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\frac{7(1-k)}{10-7k}\vec{b}+\frac{3k}{10-7k}\vec{c}$$

(問 2)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{BF}} &= \overrightarrow{\mathrm{AF}}-\vec{b} \\ &= \frac{7}{10}(1-t)\vec{b}+t\vec{c}-\vec{b} \\ &= -\frac{3+7t}{10}\vec{b}+t\vec{c}\end{aligned}$$

これを使って計算して

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{BF}}|^2 &= \frac{(3+7t)^2}{10^2}|\vec{b}|^2-\frac{t(3+7t)}{5}\vec{b}\cdot\vec{c}+t^2|\vec{c}|^2, \\ |\overrightarrow{\mathrm{AF}}|^2 &= \frac{7^2(1-t)^2}{10^2}|\vec{b}|^2+\frac{7t(1-t)}{5}\vec{b}\cdot\vec{c}+t^2|\vec{c}|^2\end{aligned}$$

したがって

$$\left(\frac{7^2(1-t)^2}{10^2}-\frac{(3+7t)^2}{10^2}\right)|\vec{b}|^2+\left(\frac{7t(1-t)}{5}+\frac{t(3+7t)}{5}\right)\vec{b}\cdot\vec{c}=0$$

条件より $|\vec{b}|^2=25$, $\vec{b}\cdot\vec{c}=5\cdot 3\cos 60^\circ=\frac{15}{2}$, これらを代入して

$$5(2-7t)+15t=0,$$
$$t=\frac{1}{2}$$

問 1 の結果より

$$\frac{1}{2}=\frac{3k}{10-7k},$$
$$k=\frac{10}{13}$$

(問 3)　問 2 の条件から △ABF は二等辺三角形。問 2 の計算と $t=\dfrac{1}{2}$ より

$$|\overrightarrow{\mathrm{AF}}|^2=\frac{127}{16}$$

辺 AB を底辺とする高さを h とすると

$$\frac{127}{16}=\left(\frac{5}{2}\right)^2+h^2,$$
$$h=\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

したがって △ABF の面積は

$$\frac{1}{2}\cdot 5\cdot\frac{3\sqrt{3}}{4}=\frac{15\sqrt{3}}{8}$$

2

(問 1)　$a_0 = 0$ より

$$\begin{cases} a_1 = a_0^2 = 0 \;\; \text{余り } 0 & \text{表のとき} \\ a_1 = a_0 + 2 = 2 \;\; \text{余り } 2 & \text{裏のとき} \end{cases}$$

したがって $p_1 = \frac{1}{2}$　$(r_1 = \frac{1}{2}, q_1 = 0)$

$a_1 = 0$ のとき

$$\begin{cases} a_2 = a_1^2 = 0 \;\; \text{余り } 0 & \text{表のとき} \\ a_2 = a_1 + 2 = 2 \;\; \text{余り } 2 & \text{裏のとき} \end{cases}$$

$a_1 = 2$ のとき

$$\begin{cases} a_2 = a_1^2 = 4 \;\; \text{余り } 1 & \text{表のとき} \\ a_2 = a_1 + 2 = 4 \;\; \text{余り } 1 & \text{裏のとき} \end{cases}$$

したがって $p_2 = \frac{1}{4}$　$(r_2 = \frac{1}{4}, q_2 = \frac{1}{2})$

(問 2)　a_n を 3 で割ったときの余りで場合分け. n, l は非負整数とする.

$a_n = 3l$ のとき, 余り 0, この確率 p_n,
以下それぞれの確率 $p_n \times \frac{1}{2}$,

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n^2 = 9l^2 = 3(3l^2) & \text{余り } 0 \quad \text{表のとき} \\ a_{n+1} = a_n + 2 = 3l + 2 & \text{余り } 2 \quad \text{裏のとき} \end{cases}$$

$a_n = 3l + 1$ のとき, 余り 1, この確率 q_n,
以下それぞれの確率 $q_n \times \frac{1}{2}$,

$$\begin{cases} a_{n+1} = (3l+1)^2 = 3(3l^2 + 2l) + 1 & \text{余り } 1 \quad \text{表のとき} \\ a_{n+1} = 3(l+1) & \text{余り } 0 \quad \text{裏のとき} \end{cases}$$

$a_n = 3l + 2$ のとき, 余り 2, この確率 r_n,
以下それぞれの確率 $r_n \times \frac{1}{2}$,

$$\begin{cases} a_{n+1} = (3l+2)^2 = 3(3l^2 + 4l + 1) + 1 & \text{余り } 1 \quad \text{表のとき} \\ a_{n+1} = 3(l+1) + 1 & \text{余り } 1 \quad \text{裏のとき} \end{cases}$$

したがって

$$p_{n+1} = \frac{1}{2}(p_n + q_n)$$
$$q_{n+1} = \frac{1}{2}q_n + r_n$$
$$r_{n+1} = \frac{1}{2}p_n$$

(問 3) $p_n + q_n + r_n = 1$ である．これを使って (問 2) で求めた漸化式を解く．n を 1 以上の整数とする．$p_n + q_n = 1 - r_n$ より

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}r_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}p_{n-1}, \\ p_{n+1} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4}p_{n-1}, \\ p_{n+1} - \frac{2}{5} &= -\frac{1}{4}\left(p_{n-1} - \frac{2}{5}\right) \end{aligned}$$

したがって, 正の整数 m に対して, (問 1) より $p_1 = \frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned} p_{2m+1} - \frac{2}{5} &= \left(-\frac{1}{4}\right)^m \left(p_1 - \frac{2}{5}\right), \\ p_{2m+1} &= \frac{2}{5} + \left(-\frac{1}{4}\right)^m \frac{1}{10} \end{aligned}$$

$p_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}r_{n-1}$ より

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= \frac{1}{2}p_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}r_{n-1}, \\ r_{n+1} &= \frac{1}{4} - \frac{1}{4}r_{n-1}, \\ r_{n+1} - \frac{1}{5} &= -\frac{1}{4}\left(r_{n-1} - \frac{1}{5}\right) \end{aligned}$$

したがって, 正の整数 m に対して, $r_1 = \frac{1}{2}$ より,

$$\begin{aligned} r_{2m+1} - \frac{1}{5} &= \left(-\frac{1}{4}\right)^m \left(r_1 - \frac{1}{5}\right), \\ r_{2m+1} &= \frac{1}{5} + \left(-\frac{1}{4}\right)^m \frac{3}{10} \end{aligned}$$

以上の結果を使って

$$\begin{aligned} q_{2m+1} &= 1 - p_{2m+1} - r_{2m+1} = \frac{2}{5} - \left(-\frac{1}{4}\right)^m \frac{2}{5}, \\ q_{2m+1} &= \frac{2}{5} - \left(-\frac{1}{4}\right)^m \frac{2}{5} \end{aligned}$$

3

(問 1)

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^a x(a-x)e^{-x}\,dx \\ &= a\int_0^a xe^{-x}\,dx - \int_0^a x^2e^{-x}\,dx \end{aligned}$$

第 1 項の積分は部分積分によって

$$\begin{aligned} \int_0^a xe^{-x}\,dx &= \left[-xe^{-x}\right]_0^a + \int_0^a e^{-x}\,dx \\ &= \left[-xe^{-x}\right]_0^a - \left[e^{-x}\right]_0^a \\ &= -ae^{-a} - e^{-a} + 1 \end{aligned}$$

$(-1) \times$ 第 2 項 は部分積分および上を代入して

$$\begin{aligned} \int_0^a x^2e^{-x}\,dx &= \left[-x^2e^{-x}\right]_0^a + 2\int_0^a xe^{-x}\,dx \\ &= -a^2e^{-a} + 2\left(-ae^{-a} - e^{-a} + 1\right) \\ &= -a^2e^{-a} - 2ae^{-a} - 2e^{-a} + 2 \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} S_1 &= a\left(-ae^{-a} - e^{-a} + 1\right) + a^2e^{-a} + 2ae^{-a} + 2e^{-a} - 2 \\ &= ae^{-a} + 2e^{-a} + a - 2 \end{aligned}$$

(問 2) 対応する部分は x 軸より下にあることに注意して, 部分積分によって計算する

$$\begin{aligned} I_n &= -\int_a^n x(a-x)e^{-x}\,dx \\ &= -a\int_a^n xe^{-x}\,dx + \int_a^n x^2e^{-x}\,dx \end{aligned}$$

第 1 項の積分は部分積分によって

$$\begin{aligned}\int_a^n xe^{-x}\,dx &= \left[-xe^{-x}\right]_a^n + \int_a^n e^{-x}\,dx \\ &= -ne^{-n} + ae^{-a} - e^{-n} + e^{-a}\end{aligned}$$

第 2 項は部分積分によって

$$\begin{aligned}\int_a^n x^2e^{-x}\,dx &= \left[-x^2e^{-x}\right]_a^n + 2\int_a^n xe^{-x}\,dx \\ &= -n^2e^{-n} + a^2e^{-a} + 2\left(-ne^{-n} + ae^{-a} - e^{-n} + e^{-a}\right)\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}I_n &= -a\left(-ne^{-n} + ae^{-a} - e^{-n} + e^{-a}\right) \\ &\qquad -n^2e^{-n} + a^2e^{-a} + 2\left(-ne^{-n} + ae^{-a} - e^{-n} + e^{-a}\right) \\ &= ane^{-n} + ae^{-n} + ae^{-a} - n^2e^{-n} - 2ne^{-n} - 2e^{-n} + 2e^{-a}\end{aligned}$$

(問 3)　(問 2) の結果より

$$S_2 := \lim_{n\to\infty} I_n = ae^{-a} + 2e^{-a}$$

(問 4)　(問 1) と（問 2) の結果より, $S_1 = S_2$ のとき

$$\begin{aligned}&ae^{-a} + 2e^{-a} + a - 2 = ae^{-a} + 2e^{-a}, \\ &a = 2\end{aligned}$$