

数 学 ③

(数学Ⅰ・数学Ⅱ・数学Ⅲ・数学A・数学B)

試験時間 120 分

医学部(医学科)

問 題	ページ
1 ～ 4	1 ～ 2

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この冊子を開いてはいけません。
 2. 各解答紙の 2 箇所に受験番号を必ず記入しなさい。
なお、解答紙には、必要事項以外は記入してはいけません。
 3. 解答は、必ず指定された解答紙に記入しなさい。また裏面は採点の対象としません。
 4. 試験開始後、この冊子又は解答紙に落丁・乱丁及び印刷の不鮮明な箇所などがあれば、手を挙げて監督者に知らせなさい。
 5. この冊子の白紙と余白部分は、適宜下書きに使用してもかまいません。
 6. 試験終了後、解答紙は持ち帰ってはいけません。
 7. 試験終了後、この冊子は持ち帰りなさい。
- ※この冊子の中に解答紙が挟み込んであります。

- 1 n 個の袋 $A_1, A_2, \dots, A_n$ がある。 $A_k (1 \leq k \leq n)$ の中には白玉が k 個, 黒玉が $n - k$ 個入っている。次の(操作)を考える。

(操作)

(操作 1) n 個の袋から無作為に 1 つの袋を選び, それを A とおく。

(操作 2) 次の試行を s 回繰り返す。袋 A から無作為に玉を 1 個取り出し, 玉の色を調べてから取り出した玉を袋 A に戻す。

以下の問いに答えよ。

- (問 1) $s = 2$ とする。(操作)を行うとき, 白玉がちょうど 1 回取り出される確率を n を用いて表せ。
- (問 2) $s = 100$ とする。(操作 1)を行った結果, $A = A_k$ であった。このとき, (操作 2)で白玉がちょうど t 回取り出される条件付き確率を $p(t)$ とする。 $n = 3k$ が成り立つとき, $p(t)$ を最大にする t の値を求めよ。
- (問 3) $s = 10$ とする。(操作)を行うとき, 白玉がちょうど 3 回取り出される確率を q_n とする。このとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n$ を求めよ。

- 2 $0 < \theta < \frac{\pi}{3}$ とする。 $AB = 1$, $\angle BAC = 3\theta$ である $\triangle ABC$ について, 辺 BC の中点を D としたとき, $\angle BAD = 2\theta$ が成り立つとする。以下の問いに答えよ。

- (問 1) $AC = 2 \cos \theta$ であることを示せ。
- (問 2) BC を $\cos \theta$ を用いて表せ。
- (問 3) BC の最大値とそのときの θ の値を求めよ。

3 k を実数とし、 $f(x) = \sin^2 x - \cos x - 1 + k$ とおく。曲線 $y = f(x)$ $\left(0 \leq x \leq \frac{3\pi}{2}\right)$ を C とする。以下の問いに答えよ。

(問 1) 曲線 C と x 軸の共有点の個数が k の値によってどのように変わるか調べよ。

(問 2) 曲線 C と x 軸の共有点が 2 個以上あるような k に対し、 $g(k)$ を

$$g(k) = \int_{p_1}^{p_2} f(x) \sin x \, dx$$

と定める。ただし、 p_1, p_2 はそれぞれ、曲線 C と x 軸の共有点の x 座標のうち 1 番小さいもの、2 番目に小さいものとする。 $g(k)$ の最大値と最小値を求めよ。

4 m を自然数とする。以下の問いに答えよ。

(問 1) $k^2 - \ell^2 = 3^m$ を満たす自然数の組 (k, ℓ) の個数を m を用いて表せ。

(問 2) $\sqrt{x(x+3^m)}$ が整数となるような自然数 x で 3 の倍数でないものを m を用いて表せ。

(問 3) $\sqrt{x(x+3^m)}$ が整数となるような自然数 x の個数を m を用いて表せ。