

数 学 ③

(数学Ⅰ・数学Ⅱ・数学Ⅲ・数学A・数学B)

試験時間 120分

医学部(医学科)

問 題	ページ
① ~ ④	1 ~ 2

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この冊子を開いてはいけません。
 2. 各解答紙に志望学部及び受験番号を必ず記入しなさい。
なお、解答紙には、必要事項以外は記入してはいけません。
 3. 解答は、必ず指定された解答紙に記入しなさい。また裏面は採点の対象としません。
 4. 試験開始後、この冊子又は解答紙に落丁・乱丁及び印刷の不鮮明な箇所などがあれば、手を挙げて監督者に知らせなさい。
 5. この冊子の白紙と余白部分は、適宜下書きに使用してもかまいません。
 6. 試験終了後、解答紙は持ち帰ってはいけません。
 7. 試験終了後、この冊子は持ち帰りなさい。
- ※この冊子の中に解答紙が挟み込んであります。

1 xy 平面上において、媒介変数 t ($0 \leq t \leq \frac{2}{3}\pi$) によって

$$\begin{cases} x = \sin t \\ y = 1 - \cos 3t \end{cases}$$

と表される曲線を C とする。以下の問いに答えよ。

(問 1) C 上の点で x 座標が最大になる点 P と y 座標が最大になる点 Q の座標をそれぞれ求めよ。

(問 2) C 上の点 $(\frac{1}{2}, 1)$ における接線の方程式を求めよ。

(問 3) C と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

2 α, β を複素数とし、複素数平面上の点 $O(0), A(\alpha), B(\beta), C(|\alpha|^2), D(\bar{\alpha}\beta)$ を考える。3 点 O, A, B は三角形をなすとする。また、複素数 z に対し、 $\text{Im}(z)$ によって z の虚部を表すことにする。以下の問いに答えよ。

(問 1) $\triangle OAB$ の面積を S_1 , $\triangle OCD$ の面積を S_2 とするとき、 $\frac{S_2}{S_1}$ を求めよ。

(問 2) $\triangle OAB$ の面積 S_1 は $\frac{1}{2}|\text{Im}(\bar{\alpha}\beta)|$ で与えられることを示せ。

(問 3) 実数 a, b に対し、複素数 z を $z = a + bi$ で定める。 $1 \leq a \leq 2, 1 \leq b \leq 3$ のとき、3 点 $O(0), P(z), Q(\frac{1}{z})$ を頂点とする $\triangle OPQ$ の面積の最大値と最小値を求めよ。

3 以下の問いに答えよ。

(問 1) x が自然数のとき, x^2 を 5 で割ったときの余りは 0, 1, 4 のいずれかであることを示せ。

(問 2) $x^2 + 5y^2 = 2z^2$ を満たす自然数 x, y, z の組は存在しないことを示せ。

4 xy 平面において, x, y がともに整数であるとき, 点 (x, y) を格子点とよぶ。2 以上の整数 n に対し,

$$0 < x < n, 1 < 2^y < \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

をみたす格子点 (x, y) の個数を $P(n)$ で表す。以下の問いに答えよ。

(問 1) 不等式

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left\{ n \log_2 \left(1 + \frac{k}{n}\right) - 1 \right\} \leq P(n) < \sum_{k=1}^{n-1} n \log_2 \left(1 + \frac{k}{n}\right)$$

を示せ。

(問 2) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(n)}{n^2}$ を求めよ。

(問 3) (問 2) で求めた極限値を L とする。不等式

$$L - \frac{P(n)}{n^2} > \frac{1}{2n}$$

を示せ。