

# 数 学 ②

(数学Ⅰ・数学Ⅱ・数学Ⅲ・数学A・数学B)

試験時間 120分

理学部, 医学部(保健学科放射線技術科学専攻, 検査技術科学専攻), 薬学部, 工学部

問 題	ページ
□1 ~ □4 .....	1 ~ 2

## 注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで, この冊子を開いてはいけません。
  2. 各解答紙に志望学部及び受験番号を必ず記入しなさい。  
なお, 解答紙には, 必要事項以外は記入してはいけません。
  3. 解答は, 必ず指定された解答紙に記入しなさい。また裏面は採点の対象としません。
  4. 試験開始後, この冊子又は解答紙に落丁・乱丁及び印刷の不鮮明な箇所などがあれば, 手を挙げて監督者に知らせなさい。
  5. この冊子の白紙と余白部分は, 適宜下書きに使用してもかまいません。
  6. 試験終了後, 解答紙は持ち帰ってはいけません。
  7. 試験終了後, この冊子は持ち帰りなさい。
- ※この冊子の中に解答紙が挟み込んであります。

**1** 以下の問いに答えよ。

- (問 1)  $x$  が自然数のとき,  $x^2$  を 5 で割ったときの余りは 0, 1, 4 のいずれかであることを示せ。
- (問 2) 自然数  $x, y, z$  が  $x^2 + 5y = 2z^2$  を満たすとき,  $x, y, z$  はすべて 5 の倍数であることを示せ。
- (問 3)  $x^2 + 5y^2 = 2z^2$  を満たす自然数  $x, y, z$  の組は存在しないことを示せ。

**2**  $\alpha, \beta$  を複素数とし, 複素数平面上の点  $O(0), A(\alpha), B(\beta), C(|\alpha|^2), D(\bar{\alpha}\beta)$  を考える。3 点  $O, A, B$  は三角形をなすとする。また, 複素数  $z$  に対し,  $\text{Im}(z)$  によって  $z$  の虚部を表すことにする。以下の問いに答えよ。

- (問 1)  $\triangle OAB$  の面積を  $S_1$ ,  $\triangle OCD$  の面積を  $S_2$  とするとき,  $\frac{S_2}{S_1}$  を求めよ。
- (問 2)  $\triangle OAB$  の面積  $S_1$  は  $\frac{1}{2}|\text{Im}(\bar{\alpha}\beta)|$  で与えられることを示せ。
- (問 3) 実数  $a, b$  に対し, 複素数  $z$  を  $z = a + bi$  で定める。 $1 \leq a \leq 2, 1 \leq b \leq 3$  のとき, 3 点  $O(0), P(z), Q\left(\frac{1}{z}\right)$  を頂点とする  $\triangle OPQ$  の面積の最大値と最小値を求めよ。

**3**  $0 < t < \frac{\pi}{2}$  のとき, 曲線  $y = \frac{1}{\cos^2 x}$  ( $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ ),  $x$  軸,  $y$  軸および直線  $x = t$  で囲まれた図形を  $y$  軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を  $V(t)$  とする。以下の問いに答えよ。

(問 1)  $0 < a < b < \frac{\pi}{2}$  のとき,

$$\pi(b^2 - a^2) \frac{1}{\cos^2 a} \leq V(b) - V(a) \leq \pi(b^2 - a^2) \frac{1}{\cos^2 b}$$

を示せ。

(問 2) (問 1) の不等式を用いて,  $\frac{d}{dt} V(t) = 2\pi t \frac{1}{\cos^2 t}$  を示せ。

(問 3)  $V\left(\frac{\pi}{3}\right)$  を求めよ。

**4** 正の実数  $t$  に対し, 座標平面上の 2 点  $F(t, 0)$ ,  $F'(3t, 0)$  からの距離の和が  $2\sqrt{2}t$  であるような点  $P$  の軌跡を  $C$  とする。直線  $y = x - 1$  を  $\ell$  とする。以下の問いに答えよ。

(問 1)  $C$  と  $\ell$  が相異なる 2 つの共有点をもつような  $t$  の範囲を求めよ。

(問 2)  $t$  が (問 1) で求めた範囲を動くとき,  $C$  と  $\ell$  の 2 つの共有点および原点  $O$  を頂点とする三角形の面積の最大値を求めよ。